Inele factoriale

Prof Șerban Simona Marinela

Definitie. Un domeniu de integritate A se numeste **inel factorial** sau cu descompunere unica in factori primi (ireductibili) daca orice element nenul si neinversabil din A se descompune intr-un produs finit de elemente prime.

Propozitia 2.1. Fie A un inel factorial . Atunci descompunerea unui element din A in produs de elemente prime este unica in afara de ordinea factorilor si o asociere a lor.
Adica, daca $a=p_1p_2\dots p_n=q_1q_2\dots q_m$, sunt doua descompuneri ale elementului nenul si neinversabil $a\in A$, atunci $n=m$ si, schimbind eventual ordinea factorilor, avem $p_i\sim q_i$, $1\leq i \leq n$.

Demonstratie: Vom demonstra prin inductie asupra numarului minim de factori din cele doua descompuneri . Presupunem ca $n\leq m$. Atunci, pentru $n=1$,
avem $p_1=q_1\dots q_m$ si deoarece p_1 este prim , el este asociat cu unul dintre factorii q_i, $1 \leq i \leq m$.
Putem presupune ca $p_1\sim q_1$ si deci produsul $q_2q_3\dots q_m\sim 1$ si deci toti q_j, $1 \leq j \leq m$ ar fi elemente inversabile ale inelului A, ceea ce nu este posibil, deoarece prin ipoteza ele sunt elemente prime, deci $m=1$ si afirmatia este dovedita in acest caz.
Presupunem afirmatia dovedita pentru orice doua descompuneri in care una are mai putin de n factori. Atunci, in descompunerea de mai sus, din faptul ca p_n este element prim rezulta ca p_n divide cel putin unul dintre q_j, $1 \leq j \leq m$.
Putem presupune ca p_n/q_m si deoarece q_m este ireductibil , rezulta ca $p_n\sim q_m$. Deci $p_n=q_mu$, unde u este element inversabil in A. Atunci, simplificind cu q_m , obtinem $a'=p_1p_2\dots p_{n-1}$ $u=q_1q_2\dots q_{m-1}$. Deoarece $p_{n-1}\bullet u$ este element prim, rezulta ca avem pentru elementul a' doua descompuneri in produse de elemente prime, dintre care una are mai putin de n factori. Atunci, din ipoteza inductiva rezulta ca avem $n-1=m-1$, iar,dupa o eventuala renumerotare a factorilor , $p_i\sim q_i$, $1 \leq i \leq n-1$, si cu aceasta teorema este demonstrata.

Fie A un inel factorial. Atunci, daca din fiecare clasa de elemente asociate , prime, luam cite un reprezentant , obtinem un sistem de reprezentanti de elemente prime$\{p_i\}i\in I$, astfel incit orice element a din A , $a\neq 0$, se scrie sub forma $a = u\prod_{i\in I} p_i^{n_i}$, $cu \quad n_i, i \in I$,numere intregi nenegative, si numai un numar finit sunt nenule , iar u un element inversabil in A. Unicitatea descompunerii se exprima , atunci, astfel: $a = u'\prod_{i\in I} p_i^{m_i}$ este alta descompunere de forma de mai sus pentru a, atunci $u=u'$ si $n_i=m_i$, $i\in I$.

Propozitia 2.2. Intr-un inel factorial, orice doua elemente au un cmmdc.

Demonstratie:
Fie a si b doua elemente din inelul factorial A. Daca unul dintre ele este nul , atunci celelalt este cmmdc al lor. Putem presupune ca a si b sunt nenule si fie $\{p_i\}i\in I$ un sistem de reprezentanti de elemente prime.
Fie a= u , b=u descompunerile lui a si b in produse de elemente prime si d= , unde $r_i=\min\{m_i,n_i\}i\in I$.
Atunci se observa ca d' este un divizor comun al lui a si b. Daca d' este un alt divizor comun al lui a si b atunci d'= , atunci din faptul ca d'/a si d'/b rezulta ca $r_i\leq m_i$ si $r_i\leq n_i$, $i\in I$,

de unde rezulta ca d'/d. Prin urmare , d este cmmdc al elementelor a si b si propozitia este demonstrata.

Observatii:

1) Din aceasta propozitie si din propozitia 3.4. din capitolul I rezulta ca intr-un inel factorial orice doua elemente au cel mai mic multiplu comun.

Intr-adevar , cu notatiile precedente se observa ca elementul m= , unde $t_i=\max\{m_i,n_i\}$ este cmmdc al elementelor a si b.

2) Din propozitia precedenta si propozitia 1.10. (cap I) rezulta ca intr-un inel factorial orice element ireductibil este prim.

Propozitia 2.3.

Fie A un inel integru . Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

1. A este inel factorial;
2. Orice element nenul si neinversabil din A se descompune in produs finit de elemente ireductibile si orice element ireductibil este prim;
3. Orice element nenul si neinversabil din A se descompune in produs finit de elemente ireductibile si doua astfel de descompuneri sunt unice in afara de ordinea factorilor si de asociere.
4. Orice element nenul si neinversabil din A se descompune in produs finit de elemente ireductibile si doua elemente din A au cmmdc.

Demonstratie:

Implicatia $1 \Rightarrow 2$ rezulta din definitia inelului factorial si observatia 2.

Implicatia $2 \Rightarrow 1$ este evidenta. Implicatia $1 \Rightarrow 3$ rezulta din definitia inelului factorial si propozitia 2.1. Din $2 \Rightarrow 1$ si $1 \Rightarrow 3$ rezulta $2 \Rightarrow 3$.

Pentru a arata $3 \Rightarrow 2$, este suficient sa observam ca din 3 rezulta ca orice element ireductibil din A este prim. Fie q un element ireductibil din A si sa presupunem q/ab. Atunci exista $q' \in A$, astfel ca ab=qq'. Din 3 rezulta ca putem considera in ab=qq' descompuneri ale elementelor a,b,q' in produs de factori ireductibili si , din unicitatea descompunerii in factori ireductibili , rezulta, din relatia ab=qq' , ca q/a sau q/b . Deci q este element prim.

Am aratat ca 1,2,3 sunt echivalente. Din observatia 2 rezulta $4 \Rightarrow 2$. Dar $2 \Rightarrow 1$, deci $4 \Rightarrow 1$. Din propozitia 2.2 rezulta ca $1 \Rightarrow 4$. Deci 1 este echivalenta cu 4.

Exemple de inele factoriale vor rezulta in continuare.