Aplicații ale principiului lui Dirichlet de rezolvare a problemelor de matematică

Prof. Mihai Cristina

Liceul Tehnologic "Petrache Poenaru", Bălcești, Vâlcea

Matematicianul german Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) a elaborat un principiu extrem de simplu cu aplicații neașteptate în variate domenii, principiu care-i poartă numele și pe care-l enunțăm mai jos, fiind o metodă de demonstrație de tipul următor:

„Dacă repartizăm n+1 obiecte în n cutii, atunci cel puțin două obiecte vor fi în aceeași cutie ”

Justificare: Considerăm cazul cel mai nefavorabil așezând în fiecare cutie câte un obiect. Deci am folosit n cutii și n obiecte. Obiectul cu numărul n+1 trebuie pus și el într-o cutie oarecare dar în acea cutie există deja un obiect. Așadar avem o cutie cu două obiecte. Nu este important care cutie conține cel puțin două obiecte, nici câte obiecte sunt în acea cutie si nici câte astfel de cutii există. Important este că există cel puțin o cutie cu cel puțin doua obiecte■.

Teorema 1. (Principiul lui Dirichlet): Fie o mulțime nevidă iar o partiție a lui (adică iar , pentru).

Dacă avem elemente din , atunci există o submulțime a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii .

În literatura matematică principiul lui Dirichlet este întâlnit și sub denumirea de „principiul cutiei”, cu precizarea că denumirea de „cutie” desemnează „grupe de obiecte”, stabilite după anumite reguli, iar „obiectele” desemnează lucruri, numere, figuri geometrice, etc. La rezolvarea unor probleme este util de aplicat principiul Dirichlet generalizat.

„Dacă plasăm pn + 1 obiecte in n cutii, atunci cel puțin o cutie va conține cel puțin "p+1"obiecte”.

Unele probleme (în special ce țin de geometrie) se rezolvă, utilizând principiul Dirichlet în următoarele enunțuri:

a) Dacă pe un segment de lungime l sunt situate câteva segmente cu suma lungimilor mai mare ca l, atunci cel puțin doua segmente au un punct comun;

b) Dacă în interiorul unei figuri de arie S sunt plasate figuri cu suma ariilor mai mare decât S, atunci exista cel puțin două dintre aceste figuri cu un punct comun;

c) Dacă figurile F1; F2; . . .; Fn cu ariile S1; S2; . . . ; Sn respectiv sunt incluse în figura F cu arie S si S1 + S2 + . . . + Sn > kS, atunci k + 1 din figurile F1; F2; ... ; Fn au un punct comun;

Ceea ce caracterizează problemele în care se folosește acest principiu, este dificultatea de a le aborda pe căi cunoscute. În general principiul cutiei este un principiu de numărare care în ultimul timp a căpătat o mare popularitate fiind pus la baza unui număr mare de probleme, unele chiar dificile .

1. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ un șir de $n+1$ numere întregi diferite două câte două. Atunci există doi indici i și $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ astfel încât $a_i \equiv a_j (mod\ n)$

Soluție: Împărțim mulțimea $\mathbb{Z}$ în cele n clase de resturi modulo n . Cum acestea formează o partiție a lui $\mathbb{Z}$, totul rezultă din principiul lui Dirichlet.

2. Fie M o mulțime formată din n numere întregi(nu neapărat distincte). Să se demonstreze că M are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n .

Soluție: Fie $\mathrm{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ cu $a_i \in \mathbb{Z}$ pentru orice $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$.

Să considerăm submulțimile lui M:

$M_1 = \{a_1\}, M_2 = \{a_1, a_2\}, \dots, M_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și să formăm sumele $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Dacă unul din numerele $S_1, S_2, \dots, S_n$ se divide cu n, problema este rezolvată.

Dacă $S_1, S_2, \dots, S_n$ nu se divid la n, atunci, conform problemei 1, există $p, q \in \mathbb{N}, k < p \leq n$, astfel încât $S_p \equiv S_k (mod\ n)$. Atunci mulțimea căutată va fi $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_p\}$.

3. Se consideră 7 numere naturale. Demonstrați că printre numerele date, cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 6.

Soluție: La împărțirea cu 6 a unui număr natural se poate obține unul din resturile: 0, 1, 2, 3, 4 sau 5. Considerăm cutia „i” formată din numerele care dau restul „i” la împărțirea cu 6. Rezultă astfel 6 cutii în care trebuie plasate 7 numere. Va exista cel puțin o cutie care conține două sau mai multe numere care dau același rest la împărțirea cu 6.

4. Să se demonstreze că printre orice șase numere întregi există doua numere a căror diferență este divizibilă prin 5.

Soluție: Conform exercițiului 3 , există cel puțin două numere care dau același rest prin împărțire cu 5, deci diferența lor este divizibilă cu 5.

5. Să se arate ca oricum am alege 7 numere pătrate perfecte (distincte), exista cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

Soluție: a^2 împărțit la 10 va da unul din resturile: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deoarece avem 7 pătrate perfecte si numai 6 resturi, atunci există cel puțin două pătrate perfecte care dau același rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor se divide cu 10.

6. Să se arate ca oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferența divizibile cu 7.

Soluție: La împărțirea cu 7 a unui număr rezultă resturile 0,1,2,3,4,5,6. Pătratul său va da la împărțirea cu 7 unul din resturile 0, 1, 2, 4. Avem cinci numere și patru resturi, rezultă conform principiului cutiei că cel puțin două din cele cinci pătrate dau același rest la împărțirea cu 7 ;

$x^2 - y^2$ se divide cu 7, deci $7 \mid (x-y)(x+y)$

cum 7 este număr prim $\Rightarrow 7 | x-y$ sau $7 | x+y$.

7. La un turneu de șah au participat n >2 șahiști. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, cel puțin doi șahiști au același număr de victorii.

Soluție: În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare șahist a jucat maximum n -2 partide și a putut obține 0, 1, 2, ….. n -2 victorii, deci în total n -1 posibilități(cutii). Deoarece la turneu au participat n șahiști, rezultă că cel puțin doi șahiști au același număr de victorii înaintea ultimei runde.

8. Considerăm mulțimea $A = \{a_1, a_{2,} \ldots\ldots a_n\}$ cu elemente numere întregi. Să se demonstreze ca A are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

Soluție: Dacă a este număr întreg și n număr natural, există q și r unice astfel încât a $= nq + r, q \in \mathbb{N}$ și $r \in \{1, \ldots, \mathrm{n}-1\}$.

Considerăm următoarele n submulțimi ale lui A:

$A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_1, a_2\}$, … , $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Notăm cu $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$, $i = \overline{1, n}$ (suma elementelor fiecărei mulțimi). Dacă unul din numerele S_i, $i = \overline{1, n}$ se divide cu *n*, problema este rezolvată. Dacă nu, cele n resturi obținute prin împărțirea cu *n* a numerelor S_i, aparțin mulțimii $\{1,\ 2,\ \ldots n-1\}$ cu n -1 elemente diferite.

Deci există cu siguranță două numere S_i și S_j care dau același rest la împărțirea cu *n*.

Fie $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ și $S_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ cele două numere. Fie $i < j$; cum $n \mid S_i - S_j$, rezultă că submulțimea este $B = \{a_{i+1},\ a_{i+2}, \ldots a_j\}$.

9. Într-o școală sunt 731 elevi. Arătați că există cel puțin 3 elevi care își serbează ziua de naștere în aceeași zi a anului.

Soluție: Presupunem că nu există 3 astfel de elevi. Deci în fiecare zi a anului își serbează ziua de naștere cel mult 2 elevi. Dacă în fiecare zi a anului își vor serba ziua de naștere doi elevi atunci, într-un an, vor avea aniversarea 365•2 = 730 elevi. În școală sunt 731 elevi, deci al 731-lea își va serba ziua împreună alți doi.

10. Din cei 24 de elevi ai unei clase, 19 au participat la olimpiada de limba română, 16 la olimpiada de matematică, 15 la olimpiada de geografie, 14 la olimpiada de fizică. Să se arate ca cel puțin opt elevi au patriciat la toate cele patru olimpiade.

Soluție: Presupunem că niciun elev nu a participat la toate cele patru olimpiade, deci fiecare a participat la cel mult trei olimpiade. Dacă fiecare elev a participat la trei olimpiade, atunci la cele patru olimpiade au participat $24 \cdot 3 = 72$ de elevi. Dar numărul elevilor participanți la olimpiade este $19 + 16 + 15 + 14 = 64$. Avem în plus 8 elevi. Deci cel putin 8 elevi au participat la toate cele patru olimpiade.

11. Să se arate că printre oricare 52 de numere naturale, există cel puțin două care au suma sau diferența divizibilă cu 100.

Soluție: Ne fixăm 51 de submulțimi. Prima submulțime conține toate numerele naturale ce se termină cu 00, a doua conține numerele ce se termină cu 01 sau 99, a treia conține pe cele care se termină cu 02 sau 98, ... , a 50-a submulțime conține numerele care se termină cu 49 sau 51, iar a 51-a submulțime conține numerele care se termină cu 50. Deoarece avem 52 de numere, conform principiului lui Dirichlet cel puțin două se vor găsi in aceeași submulțime din cele de mai sus. Dar în orice submulțime de mai sus suma sau diferența a două numere se divide cu 100, deci cel puțin 2 numere din cele 52 au suma sau diferența divizibilă cu 100.

12.Să se arate că pentru oricare trei numere prime $p > q > r \geq 5$ numărul $N = (p^2 - q^2)(p^2 - r^2)(q^2 - r^2)$ se divide cu 30

Soluție: Numerele fiind prime(și diferite de 2) ele sunt toate impare și atunci *(p-q)(p+q)* se divide cu 4, deci N se divide cu 2(chiar cu $2^6 = 32$).

Numerele fiind prime, niciunul nu se divide cu 3, deci sunt de forma *3k+1* sau *3k+2*, cel puțin două din trei au aceeași formă. Dacă *p=3k+1* și *q=2m+1* atunci $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 3(k-m)(p+q) \vdots 3$, deci *N* se divide cu 3.

Dacă două dintre numerele *p,q,r* dau același rest prin împărțire cu 5, suma pătratelor lor(implicit și diferența pătratelor) se divide cu 5. Dacă nu resturile sunt 1,2,3 sau 1,2,4 sau 1,3,3 sau 2,3,4. În fiecare caz suma a două dintre ele este divizibilă cu5.

Deci *N* se divide cu 2, cu 3 și cu 5, adica 30|*N*.

13. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 și *N* diferența a două din numerele $N^{n_1}, N^{n_2}, N^{n_3}, N^{n_4}, N^{n_5}$ se divide cu 5.

Soluție: Pentru orice număr natural N șirul ultimelor cifre este periodic de perioadă cel mult 4, deci ultima cifră a lui N^k este una din 4 cifre(pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$). Există două din cele cinci puteri care au ultima cifră aceeași. Diferența lor se divide cu 10, deci și cu 5.

14.Să se arate că pentru orice număr impar n exista un număr $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^k - 1$ să fie divizibil cu n.

Soluție: Considerăm numerele $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^n - 1, 2^{n+1} - 1$ care dau $n + 1$ resturi la împărțirea cu n. Cel puțin două dau același rest, deci diferența lor se divide cu n.

Dar $(2^k - 1) - (2^p - 1) = 2^k - 2^p = 2^p(2^{k-p} - 1) \vdots n$ și deoarece 2^p și n(impar) sunt relativ prime rezultă $2^{k-p} - 1 \vdots n$.

15. Să se arate că printre $n + 1$ numere naturale diferite mai mici decât $2n$ se găsesc trei numere cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlalte două.

Soluție: Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ cele $n + 1$ numere naturale cu proprietatea că $a_i \leq 2n, 1 \leq i \leq n + 1$. Să presupunem că $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$. Atunci $a_{n+1} - a_1, a_{n+1} - a_2, \dots, a_{n+1} - a_n$ sunt încă numere naturale mai mici decât $2n$, în total(cu cele inițiale) avem $n + 1 + n = 2n + 1$ numere. Cum ele sunt mai mici decât decât $2n$, conform principiului lui Dirichlet, exisă două numere ce vor coincide.

$a_i = a_{n+1} - a_j$ ($i \in \{1,2,\dots,n+1\}, j \in \{1,2,\dots,n\}$)

De aici $a_{n+1} = a_i + a_j$.

16. Punctele planului sunt colorate in două culori. Să se arate ca există două puncte de aceeași culoare situate la distanța 1 m.

Soluție: Considerăm un triunghi echilateral cu lungimea laturii de 1 m. Vârfurile triunghiului vor desemna "obiectele" și culorile vor fi "cutiile". Cum "obiecte" sunt mai multe decât "cutii" rezultă, că există două vârfuri de aceeași culoare. Cum triunghiul este echilateral, distanța dintre vârfuri este 1 m.

Ținem să menționăm că această problemă poate fi rezolvată și prin altă metodă. Fie A un punct în plan și presupunem, că toate punctele din plan situate la distanța de 1 m de A sunt de culoare diferită de culoarea punctului A. Atunci avem o circumferința de raza 1 din puncte de aceeași culoare. Evident există o coardă a acestei circumferințe de lungime 1 m. Prin urmare, extremitățile coardei sunt puncte de aceeași culoare situate la distanța de 1 m.

17. Se consideră în plan n puncte distincte. Câte două puncte determină un segment. Să se demonstreze că există două puncte din care pleacă același număr de segmente.

Soluție: Dintr-un punct pleacă maximum n-1 segmente si minim 1. Cum avem n puncte, vor exista două din care pleacă același număr de segmente.

18. În interiorul pătratului de latura 1 sunt așezate câteva cercuri, având suma lungimilor egală cu 10. Să se arate că există o dreapta, care să intersecteze cel puțin patru din aceste cercuri.

Soluție: Se proiectează cercurile pe una din laturile pătratului. Proiecția fiecărui cerc este un segment cu lungimea egală cu lungimea diametrului cercului respectiv. Suma tuturor acestor segmente este 3,1. Conform principiului Dirichlet, există cel puțin patru segmente ce au în comun un punct. Perpendiculara ridicată în acest punct, pe latura pătratului, va intersecta cel puțin patru cercuri.

19. În plan sunt date 25 puncte, astfel încât dintre orice trei puncte două puncte sunt situate la distanța mai mică ca 1. Să se demonstreze ca există un cerc de raza 1 ce conține nu mai puțin de 13 din aceste puncte.

Soluție: Fie A unul din punctele date. Dacă celelalte puncte sunt în interiorul cercului S1de raza 1 și centrul in A, atunci problema este soluționată. Fie B unul dintre punctele situate in exteriorul cercului S1. Examinăm cercul S2 de raza 1 și centrul B. Printre punctele A; B; C, unde C un punct arbitrar dintre cele date, există două cu distanța intre ele mai mică decât 1.Mai mult aceste puncte nu pot fi A si B. Astfel cercurile S1 și S2 conțin toate punctele inițiale. Deci, unul dintre aceste cercuri conține cel puțin 13 puncte.

20. În pătratul de latură 1 se consideră 64 de puncte. Să se arate că există trei puncte dintre acestea ca pot fi acoperite cu un cerc de rază 1/8.

Soluție: Începem rezolvarea prin a observa că dacă cercul de rază r conține punctual A, atunci și central acestui cerc va aparține cercului de centru și rază r . Deci pentru rezolvarea problemei este de ajuns să găsim trei cercuri, de rază $\frac{1}{8}$ cu centrele în trei din cele 64 de puncte, care să aibă în comun un punct. Observăm că punctele din cercurile cu centrele în unele din cele 64 de puncte pot fi depărtate de laturile pătratului cu mai puțin de 1/8. Aria figurii maxime ce poate fi acoperită cu cercuri de rază și cu centrele în interiorul pătratului este:

$$1+4\cdot\frac{1}{8}\cdot 1+4\cdot\frac{\pi}{4^4}=1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^4}$$

Aria celor 64 de cercuri cu raza de $\frac{1}{8}$ este egală cu π. Cum $\pi-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$ în timp ce $\pi-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4^3}\right)>0$, conform principiului lui Dirichlet există trei cercuri(de fapt discuri) care să aibă în comun un punct.

21. Să se arate că dacă într-un punct din interiorul unui poligon regulat cu $2n$ laturi se întâlnesc n diagonale, atunci acest punct este centrul cercului circumscris poligonului.

Soluție: Prin reducere la absurd, presupunem că diagonală din cele n nu trece prin centrul cercului circumscris. Atunci cel puțin de o parte a acestei diagonale se găsesc mai puțin de $n-2$ vârfuri ale poligonului. Deci, din principiul lui Dirichlet, deducem că din cele $n-1$ diagonale rămase, cel puțin două pornesc din același vârf. Acest lucru însă nu este posibil, deoarece ele se intersectează și în centrul cercului circumscris și sunt distincte. Am ajuns deci la o contradicție. Așadar toate diagonalele trec prin centrul cercului circumscris poligonului.

22. În plan se consideră $2n^2+1$ puncte cu proprietatea că pentru oricare dintre ele există un cerc de rază 1 care să le conțină în interior. Să se arate că există un cerc de rază $\frac{2\sqrt{6}}{3n}$ care să conțină în interior trei dintre punctele date.

Soluție: Se consider cercurile de rază 1 ce au centrele în punctele date. Se deduce de aici că intersecția oricăror trei cercuri este nevidă și conform teoremei lui Helly, intersecția tuturor cercurilor este nevidă. În această intersecție se aflã un punct care este centrul unui cerc de rază 1. Acest cerc conține toate punctele date. Fie O acest cerc. Construim un pătrat circumscris lui O. Acesta are latura 2. Se împarte pătratul în n^2 pătrățele egale, de latură $2/n$. Toate cele $2n^2+1$ puncte sunt în interorul pătratului. Cum sunt n^2 pătrățele, se deduce că există un pătrățel ce include trei puncte date. Laturile triunghiului format de cele trei puncte vor fi mai mici decât $2\sqrt{2}/n$. Dacă un triunghi are laturi mai mici decât l, el poate fi inclus într-un cerc de rază $l/\sqrt{3}$.

23. O sferă de rază egală cu 10 este înscrisă într-un poliedru cu 19 fețe. Să se arate că pe suprafața sa se pot găsi două puncte astfel încât distanța dintre ele să fie mai mare decât 21.

Soluție: Vom rezolva problema prin reducere la absurd. Presupunem că distanța între orice două puncte ale suprafeței poliedrului cu 19 fețe este mai mică decât 21. Atunci acest poliedru va fi situat în interiorul unei sfere de rază 11 concentrică cu sfera de rază 10 și fiecare față a sa va fi situată între sfere. Din acest motiv aria fiecărei fețe nu depășește aria unui cerc de rază $\sqrt{21}$(obținut prin secționarea sferei de rază 11 cu un plan tangent sferei de rază 10). Aria poliedrului nu depășește $19\pi(\sqrt{21})^2=\pi(20^2-1^2)=399\pi$; dar aria lui este mai mare decât aria sferei de rază 10, egală cu $4\pi\cdot 10^2$. Am obținut astfel o contradicție.

24. Vârfurile unui poligon regulat cu nouă laturi sunt colorate cu roșu și albastru. Să se arate că există două triunghiuri congruente, fiecare din ele având vârfurile colorate cu o aceeași culoare.

Soluție: Din nouă vârfuri, colorate cu două culori, se pot separa cel puțin cinci, care sunt colorate la fel. Presupunem că această culoare este roșie. Cinci vârfuri colorate în roșu formează $C_5^3 = 10$ triunghiuri diferite la fel colorate(în roșu). Rotația de centru O și unghi $2k\pi/9$, $k = 0,1, \dots, 8$(O este centrul poligonului regulat) nu schimbă mulțimea M a vârfurilor acestui poligon. Prin rotația de unghi $2k\pi/9$ a fiecăruia din cele 10 triunghiuri colorate în roșu se obțin $10 \cdot 9 = 90$ de triunghiuri cu vârfurile în mulțimea M. Dar mulțimea tuturor triunghiurilor formate cu cele două vârfuri este egală cu $C_9^3 = 78 < 90$. Deci există două triunghiuri D_1 și D_2 colorate în roșu, care după câteva rotații coincide cu un același triunghi.

25. Pe tabla de șah 8×8 notăm centrele tuturor câmpurilor. Un număr de treisprezece drepte pot împărți tabla în părți astfel încât în interiorul fiecărei părți să nu se afle mai mult decât un centru al unui câmp?

Soluție: Pe marginea tablei de șah 8×8 considerăm 28 de câmpuri. Se duc cele 28 de segmente ce unesc centrele a două câmpuri consecutive(din cele 28 considerate). Orice dreaptă poate intersecta cel mult două din segmentele considerate și deci treisprezece drepte pot intersecta cel mult 26 de segmente, adică se pot găsi cel puțin două segmente ce nu sunt intersectate de dreptele considerate. Deci răspunsul este negativ.

26. În dreptunghiul de laturi 20 și 25 se aruncă 120 de pătrate de latură 1. Arătați că în dreptunghi se poate așeza un cerc de diametru 1 care nu intersectează niciunul din pătratele date.

Soluție: Centrul cercului de diametru 1, așezat în întregime în dreptunghiul dat, se află așezat la o distanță mai mare ca ½ de laturile dreptunghiului (fig. 2a), adică în dreptunghiul de laturi 19 și 24.

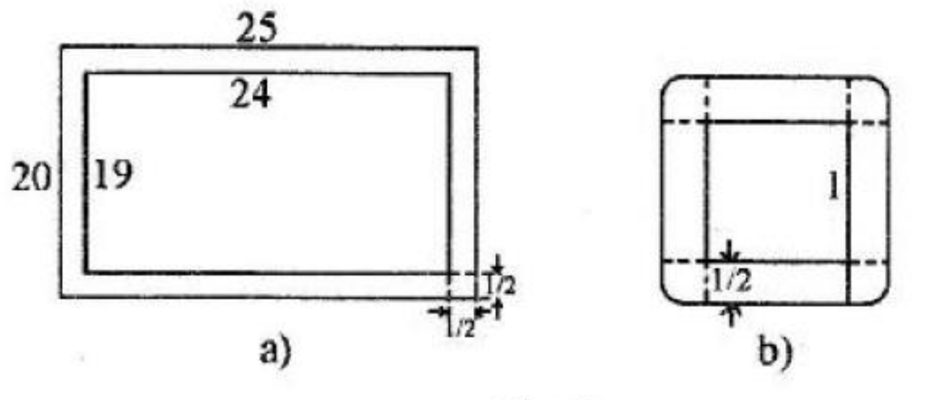

Fig. 2

Aria acestui dreptunghi este egală cu $19 \cdot 24 = 456$. Pentru ca cercul de diametru 1 să nu taie un pătrățel de latură 1, centrul lui trebuie să fie la o distanță mai mare ca ½ de laturile acestuia(fig. 2b), adică în afara conturului, care delimitează o arie egală cu $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\pi\frac{1}{4}+1}{4} = 3 + \frac{\pi}{4}$ .Chiar dacă aceste figuri nu se intersectează(situația cea mai nefavorabilă), suma ariilor acestora este egală cu $120\left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \cdot 3{,}2 = 456$.

Prin urmare aceste figuri nu pot acoperi dreptunghiul de arie 46 și deci există un cerc de diametru egal cu 1, care nu intersectează niciunul din pătrate.

27. Se dă un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alee 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție: Să împărțim fiecare latură a cubului în câte trei părți egale și ducând prin ele paralele la muchii obținem pe fiecare față a cubului 9 pătrate egale. Ducând plane paralele cu fețele cubului prin punctele de diviziune cubul este astfel împărțit în 27 de cubulețe, fiecare cu latura de 1/3. Cum sunt 28 de puncte interioare, conform principiului lui Dirichlet, cel puțin două se vor afla în interiorul aceluiași cubuleț de latură 1/3. Distanța maximă dintre cele două puncte nu poate depăși diagonal unui astfel de cubuleț, care este $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

28. Fiind date 9 puncte in interiorul pătratului unitate, să se demonstreze că există printre ele trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi de arie mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluție: Unind două câte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat obținem o împărțire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Conform principiului lui Dirichelt cel puțin unul dintre acestea va conține trei sau mai multe puncte din cele 9 considerate în enunț. Notăm EFGH acest pătrat și fie A, B, C trei dintre aceste puncte conținute în pătratul EFGH de latură $\frac{1}{2}$ obținut ca mai înainte(vezi fig. 1); va fi suficient să probăm că $S_{ABC} \leq \frac{1}{2} \cdot S_{EFGH}$. Ducând prin A,B,C paralele la EH, una se va afla între celelalte două, deci va tăia în interior latura opusă prin care aceasta trece. Fie AA' aceasta, cu A' ∈ BC; construim BB'⊥ AA', cu B' ∈ AA' și CC'⊥ AA' cu C' ∈ AA'.

Avem $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{ACA'} = \frac{1}{2} \cdot \text{AA'} \cdot \text{BB'} + \frac{1}{2} \cdot \text{AA'} \cdot \text{CC'}$

$= \frac{1}{2} \cdot \text{AA'} \cdot (\text{BB'} + \text{CC'}) \leq \frac{1}{2} \cdot EH \cdot \text{HG} = \frac{1}{8}$.