PROIECT DIDACTIC

Inducția matematică

Prof.: Mihai Cristina

Unitatea de învățământ: Liceul Tehnologic "Petrache Poenaru", Bălcești, Vâlcea

Disciplina: Matematică

Clasa: a IX-a A

Unitatea de învățare: **Mulțimi și elemente de logică matematică.**

Titlul lecției: **Inducția matematică. Aplicații**

Tipul lecției: de însușire și fixare a cunoștințelor

Durata: 50'

Locul de desfășurare: sala de clasă

Data:

Obiective operaționale: Până la sfârșitul lecției elevii vor fi capabili:

O1. să definească un raționament matematic;

O2. să enunțe principiul inducției matematice;

O3. să recunoască exercițiile cărora li se aplică inducția matematică;

O4. să aplice inducția matematică în diverse exerciții.

Metode și procedee de instruire: conversația, exemplificarea, problematizarea, expunerea, explicația, exercițiul.

Mijloace de învățământ: manualul, culegeri, fișe, creta, tabla, laptop-ul, videoproiectorul.

Bibliografie: manualul de matematică pentru clasa a IX-a (Ed. Carminis, M. Burtea), culegeri (Ed. Mathpress, M Ganga, Ed. Carminis, M. Burtea, E.D.P. Niță/Năstăsescu)

Evenimentele instruirii	**Activitatea profesorului**	**Activitatea elevilor**	**Resurse și strategii didactice**	**Evaluare**
1. Organizarea clasei	Profesorul notează absențele. Face observații și recomandări, dacă este cazul	Elevii răspund la întrebările puse de profesor, își însușesc observațiile și recomandările primite		
2. Verificarea temei	Verifică tema pentru acasă	Elevii răspund la întrebările profesorului	Manual, culegeri, conversația, exercițiul, problematizarea, descoperirea	Observarea sistematică a elevilor și aprecierea verbală
3. Comunicarea titlului lecției și a obiectivelor operaționale ale acesteia	Profesorul anunță titlul lecției: „Metoda inducției matematice” și obiectivele ei	Elevii notează titlul lecției pe caiete	Expunerea cu ajutorul videoproiectorului	

4. Desfășurarea lecției	Profesorul îi întreabă pe elevi dacă își mai amintesc, din clasele anterioare, valoarea sumei: $1+2+3+....+100$ Ce se întâmplă însă cu suma $1+2+3+....+n$ Acesta le dă elevilor formula de calcul, apoi explică demonstrarea acesteia $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Metoda care va servi la demonstrarea acestei afirmații este <u>inducția matematică</u>. Metoda se bazează pe următorul principiu, admis adevărat în aritmetica numerelor naturale:	Elevii găsesc valoare sumei lui Gauss. $1+2+3+....+100=\frac{100(100+1)}{2}$ Elevii nu pot da un răspuns concret, motiv pentru care intervine profesorul.	Manual, culegeri, conversația, exercițiul, problematizarea, descoperirea	Observarea sistematică a elevilor și aprecierea verbală

	Principiul inducției matematice: „Fie P(n) un enunț matematic care depinde de un număr natural n și care îndeplinește condițiile: 1. P(0) este o propoziție adevărată 2. dacă P(k), k este număr natural oarecare, este propoziție adevărată, rezultă că și propoziția P(k+1) este adevărată. Atunci P(n) este un enunț adevărat pentru orice număr natural n.” Demonstrația prin metoda inducției matematice a unui enunț are două etape: 1. Verificarea – se verifică faptul că P(m) este adevărată.	Elevii notează în caiete explicațiile profesorului.		

	2. Demonstrația – se demonstrează implicația P(k)≥ P(k+1), unde k ≥ m. Dacă ambele etape sunt verificate, atunci propoziția este adevărată. Metoda inducției matematice este folosită pentru introducerea unor definiții sau demonstrarea unor identități, inegalități, probleme de divizibilitate, teoreme etc.	Elevii, împreună cu profesorul, demonstrează enunțul propus la începutul orei. $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 1. Verificarea: n=1⇔ 1= $\frac{1(1+1)}{2}$ (A) 2. Demonstrația: Fie P(k): $1+2+3+....+k=\frac{k(k+1)}{2}$ Presupunem P(k)adevărată și demonstrăm că P(k+1) este adevărată. P(k+1): $1+2+3+....+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$		

	Profesorul propune rezolvarea unor exerciții: $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\Leftrightarrow$ $\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. În urma calculelor, se ajunge la $\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, deci propoziția este adevărată.		
	Profesorul supraveghează corectitudinea calculelor	Folosind metoda inducției matematice parcurgem cele 2 etape: 1. Verificarea: P(1): $1^2=\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$ (A) 2. Demonstrația:		

		Pp P(k)adevărată și demonstrăm că P(k+1) este adevărată. P(k): $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ P(k+1): $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} +$ $(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ Efectuarea corectă a calculelor conduce la o relație adevărată. Atât verificarea, cât și demonstrația propoziției sunt adevărate, deci afirmația inițială este adevărată.		

5. Obținerea performanței	Profesorul propune spre rezolvare mai multe exerciții cu grade diferite de dificultate $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+....+\frac{1}{n(n+1)}$ $=\frac{n}{n+1}$	Elevii ies la tablă pentru a rezolva exercițiile. 1. Verificare P(1): $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}$ (A) 2. Demonstrație: Pp. P(k) adevărată și demonstrez că P(k+1) este adevărată. P(k): $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+....+\frac{1}{k(k+1)}$ $=\frac{k}{k+1}$ P(k+1): $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+....+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ $=\frac{k+1}{k+2}$ $\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$ Prin aducere la același numitor se ajunge la o relație adevărată, deci propoziția inițială este adevărată.	Manual, culegeri, conversația, exercițiul, problematizarea, descoperirea	Observarea sistematică a elevilor și aprecierea verbală

	Inducția matematică este folosită și la demonstrarea unor inegalități: Să se demonstreze că $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea $2^n > 2n+1$	Fie propoziția P(n): $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N},\ 2^n > 2n+1$. 1. Verificarea pt. n=3: P(3): $2^3 > 2 \times 3 + 1$ (A) 2. Demonstrația: Pp. P(k) adevărată și demonstrăm că P(k+1) este adevărată. P(k): $\forall k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ $2^k > 2k+1$, iar P(k+1): $2^{k+1} > 2k+3$ Din $2^k > 2k+1$, prin înmulțire cu 2 obținem $2^{k+1} > 4k+2$.		

		Dar, $4k+2=2k+2+2k>2k+3$, $\forall k\geq 3, k\in\mathbb{N}$		
6. Tema pentru acasă	Profesorul anunță tema pentru acasă: Manual: p58 ex E1, E2, E4 Culegere: p17 ex 5 a, b, c, d 8 a, b, c p21 test2, ex1, 4	Elevii își notează tema		